Chapitre 23 : Déterminant

Table des matières

Introduction

Le but de ce chapitre est de définir une fonction

$$\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$$

appelée *déterminant*, et qui vérifiera les propriétés suivantes :

1. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ est inversible
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$; $\det(I_n) = 1$; si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
3. $\det({}^tA) = \det(A)$
4. pour $n = 2$: $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \underset{\text{not}}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$
5. pour $n = 3$: $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \underset{\text{not}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$ (règle de Sarrus [1])

   Attention ! Cette règle ne se généralise pas pour des matrices de taille plus grande.
6. Le déterminant d'une matrice triangulaire est égale au produit de ses coefficients diagonaux.
   Ceci est vrai en particulier pour les matrices diagonales.
7. *Effet des opérations élémentaires sur le déterminant :*
   (*i*) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (avec $i \neq j$) : déterminant inchangé
   (*ii*) $L_i \leftrightarrow L_j$ (avec $i \neq j$) : déterminant multiplié par (-1)
   (*iii*) $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (avec $\lambda \neq 0$) : déterminant multiplié par λ

   Idem pour les transformations élémentaires sur les colonnes.
   On peut donc utiliser la méthode du pivot de Gauss pour calculer un déterminant.
8. *Développement par rapport à une ligne ou une colonne :*
   Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   On note $A_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.
   - Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$ (développement suivant la i-ème ligne)
   - Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$ (développement suivant la j-ème colonne)

   Les scalaires $(-1)^{i+j}$ correspondent aux signes de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} + & - & + & & & \\ - & + & - & & & \\ + & - & + & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & - \\ & & & & - & + \end{pmatrix}$$

   Ces formules permettent de ramener le calcul d'un déterminant à des déterminants de taille inférieure.
9. *Multilinéarité par rapport aux colonnes ou aux lignes :*
   Pour une matrice A de colonnes $C_1, \cdots, C_n$, on écrit aussi $\det(C_1, \ldots, C_n)$ au lieu de $\det(A)$.
   Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, le déterminant est linéaire par rapport à la colonne numéro i, c'est-à-dire :
   (*i*) $\det(C_1, \ldots, C_i + C_i', \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n) + \det(C_1, \ldots, C_i', \ldots, C_n)$
   (*ii*) $\det(C_1, \ldots, \lambda C_i, \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$

   On a la même propriété par rapport aux lignes.
   En particulier, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ (pour une matrice carrée A de taille n).
   Attention ! En général : $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$; $\det(\lambda A) \neq \lambda \det(A)$

1. Pierre Frédéric Sarrus, mathématicien aveyronnais né le 10 mars 1798 à Saint-Affrique.

1 Formes multilinéaires alternées

Définition 1.1 (forme multilinéaire)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Une <u>forme n-linéaire sur E</u> est une application $f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\forall (x_1\,,\ldots,x_{i-1}\,,x_{i+1}\,,\ldots,x_n) \in E^{n-1}$, l'application partielle

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x_i & \longmapsto & f(x_1\,,\ldots,x_{i-1}\,,x_i\,,x_{i+1}\,,\ldots,x_n) \end{array}$$

est linéaire.

Cas particuliers :

1. *Pour $n = 1$, c'est la même chose que la linéarité.*
2. *Pour $n = 2$, on dit « bilinéaire » plutôt que « 2-linéaire ».*
   Une forme $f : E^2 \to \mathbb{K}$ est bilinéaire si et seulement si :
   (i) $\forall y \in E$, $\forall x\,,x' \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(x + \lambda x'\,,y) = f(x\,,y) + \lambda f(x'\,,y)$ *(linéarité à gauche)*
   (ii) $\forall x \in E$, $\forall y\,,y' \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(x\,,y + \lambda y') = f(x\,,y) + \lambda f(x\,,y')$ *(linéarité à droite)*

Attention ! Ce n'est pas la même chose de dire que $f : E^n \to \mathbb{K}$ est n-linéaire que de dire qu'elle est linéaire. Par exemple, pour une forme bilinéaire $f : E^2 \to \mathbb{K}$, on aura $f(\lambda(x,y)) = f(\lambda x\,,\lambda y) = \lambda^2 f(x\,,y)$, et pas $\lambda f(x\,,y)$.

Exemples 1.2 :

1. L'application $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ définie par $f(x_1\,,\ldots,x_n) = x_1 \cdots x_n$ est une forme n-linéaire sur $\mathbb{K}$.
2. L'application $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$ définie par $f(P\,,Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{K}[X]$.

Ces deux formes multilinéaires sont dites *symétriques*, car l'image est inchangée par permutation des variables.

Définition 1.3 (forme alternée)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire (avec $n \in \mathbb{N}^*$).
On dit que f est <u>alternée</u> si :

$$\forall (x_1\,,\ldots,x_n) \in E^n,\ (\exists i \neq j \in [\![1\,;n]\!],\ x_i = x_j) \implies f(x_1\,,\ldots,x_n) = 0.$$

Remarque : Une forme 1-linéaire est toujours alternée.

Exemples 1.4 :

1. *Calculs d'aires dans le plan :*
   On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, et on choisit comme unité d'aire le carré construit sur la base canonique $(\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j})$.
   Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs de E, on définit $f(\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$ comme l'aire *orientée* du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (l'aire est affectée d'un signe $+$ si $(\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v})$ est une base directe, d'un signe $-$ si c'est une base indirecte, est nulle si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires).
   Alors l'application $f : E^2 \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire alternée sur E.
2. *Calculs de volumes dans l'espace :*
   On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, et on choisit comme unité de volume le cube construit sur la base canonique $(\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\,,\overrightarrow{k})$.
   Si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont trois vecteurs de E, on définit $f(\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v}\,,\overrightarrow{w})$ comme le volume *orienté* du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ (l'aire est affectée d'un signe $+$ si $(\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v}\,,\overrightarrow{w})$ est une base directe, d'un signe $-$ si c'est une base indirecte, est nulle si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires).
   Alors l'application $f : E^3 \to \mathbb{R}$ est une forme trilinéaire alternée sur E.

Définition 1.5 (forme n-linéaire antisymétrique)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire (avec $n \in \mathbb{N}^*$).
On dit que f est antisymétrique si

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in E^n, \forall i \neq j \in [\![1\,;n]\!], f(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = -f(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$$

Proposition 1.6 (antisymétrique et alternée sont synonymes)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire (avec $n \in \mathbb{N}^*$).

$$f \text{ est alternée} \iff f \text{ est antisymétrique}$$

2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Définition 2.1 (déterminant dans une base)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Il existe une unique forme n-linéaire alternée f sur E telle que $f(e_1, \ldots, e_n) = 1$.
Cette forme n-linéaire alternée f est appelée déterminant dans la base $\mathscr{B}$, et notée $\det_{\mathscr{B}}$.

Interprétation géométrique du déterminant dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$:

1. Dans $\mathbb{R}^2$: on note $\mathscr{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base canonique.
   Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^2$, $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, en prenant comme unité d'aire le carré construit sur $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$: on note $\mathscr{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ la base canonique.
   Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de $\mathbb{R}^3$, $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est le volume orienté du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, en prenant comme unité de volume le cube construit sur $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$.

En effet, pour chacun de ces deux exemples, l'application n-linéaire alternée f définie en bas de la page 3 vérifie $f(\mathscr{B}) = 1$, donc $f = \det_{\mathscr{B}}$ grâce à l'unicité dans la définition 2.1.

Proposition 2.2 (expression du déterminant dans une base en dimension 2)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2, et soit $\mathscr{B} = (e_1,e_2)$ une base de E.
Pour toute famille $(x_1,x_2) \in E^2$, si on note $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2)$, alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2) = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

Exemple 2.3 : Déterminer $\det_{\mathscr{B}}(1+X, 1-X)$ où $\mathscr{B} = (1,X)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$.

Proposition 2.4 (expression du déterminant dans une base en dimension 3)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, et soit $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3)$ une base de E.
Pour toute famille $(x_1,x_2,x_3) \in E^3$, si on note $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, x_3)$, alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, x_3) = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}$$

Expression du déterminant dans une base en dimension finie :
Pour toute famille $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$, si on note $(a_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$, alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

où S_n est l'ensemble des bijections (permutations) de $[\![1;n]\!]$ dans lui-même, et où $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ est ce qu'on appelle la signature de σ. Cette formule n'est pas à savoir (hors programme), mais il est intéressant de retenir que $\det_{\mathscr{B}}$ est une fonction polynomiale en les coefficients $(a_{i,j})$.
Pour $n = 4$, cette formule comprendrait $4! = 24$ termes. Il est donc indispensable de développer d'autres outils car cette définition abstraite ne permet pas de calculer des déterminants de manière efficace.

Proposition 2.5 (toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_{\mathscr{B}}$)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Si f est une forme n-linéaire alternée sur E, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \det_{\mathscr{B}}$.

Remarque : Par conséquent, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des formes n-linéaires aternées sur E (où $n = \dim E$) est de dimension 1 : c'est une droite vectorielle engendrée par $\det_{\mathscr{B}}$, où $\mathscr{B}$ est n'importe quelle base de E.

Théorème 2.6 (formule de changement de base pour les déterminants)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.
On a la relation :

$$\det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}$$

Remarques :

1. Pour savoir si on doit écrire $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$ ou $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})$, se rappeler que la formule doit être correcte évaluée en $\mathscr{B}$.
2. En évaluant la formule en $\mathscr{B}'$, on obtient que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$ et $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) = \dfrac{1}{\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')}$.

Exemple 2.7 : Soient $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathscr{B}' = (1, X-1, (X-1)^2)$ deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$.
Exprimer $\det_{\mathscr{B}'}$ en fonction de $\det_{\mathscr{B}}$.

Proposition 2.8 (caractérisation des bases à l'aide du déterminant)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathscr{B}$ une base de E et soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.
La famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Exemple 2.9 : Montrer que la famille $\mathscr{F} = (1 + 2X + 3X^2, 3 + X + 2X^2, 2 + 3X + X^2)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie :
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Définir une orientation sur E signifie que l'on sait dire quelles bases de E sont directes et lesquelles sont indirectes.
Pour ceci, on se fixe une base $\mathscr{B}_0$ de référence, et on décrète qu'une base $\mathscr{B}$ de E est :

- une base <u>directe</u> si $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) > 0$;
- une base <u>indirecte</u> si $\det_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) < 0$.

Dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$, on retrouve bien la notion usuelle d'orientation en choisissant pour $\mathscr{B}_0$ la base canonique.

Remarques : Grâce à la formule de changement de base pour le déterminant, on a la propriété suivante :
Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.

- si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$, alors $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ont la même orientation (les deux sont directes ou les deux sont indirectes) ;
- si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') < 0$, alors $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ont des orientations distinctes (l'une est directe et l'autre est indirecte).

3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 3.1 (déterminant d'une matrice carrée)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, de colonnes $C_1, \ldots, C_n$ (vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).
Alors $\det(A) \underset{\text{def}}{=} \det_{\mathscr{B}}(C_1, \ldots, C_n)$, où $\mathscr{B}$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

En particulier, pour $n = 2$ et $n = 3$, on retrouve les formules données dans l'introduction.

Remarques : Les propriétés suivantes découlent directement de la définition :

1. $\det(I_n) = 1$
2. Le déterminant est n-linéaire par rapport aux colonnes.
   En particulier, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, pour tous $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. Le déterminant est alterné par rapport aux colonnes, ce qui signifie que si deux colonnes sont identiques, alors le déterminant est nul.
4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B}$ une base de E, et $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$.
   Alors $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \cdots, x_n) = \det(A)$, où $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \cdots, x_n)$.

Théorème 3.2 (caractérisation de l'inversibilité d'une matrice à l'aide du déterminant)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Exemple 3.3 : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

Théorème 3.4 (déterminant d'une transposée)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'égalité : $\det(A) = \det(A^T)$.

Conséquence : Le déterminant est aussi n-linéaire alterné par rapport aux lignes.

Théorème 3.5 (déterminant d'un produit)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'égalité : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Corollaire 3.6 (déterminant d'un inverse, d'une puissance)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det(A^k) = \det(A)^k$.
   Si de plus A est inversible, cette égalité est valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3.7 (deux matrices semblables ont le même déterminant)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A et B sont semblables, alors $\det(A) = \det(B)$.

Remarque : La réciproque est fausse. Contre-exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont le même déterminant (il vaut 0), mais elles ne sont pas semblables (car la seule matrice semblable à $0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{K})}$ est elle-même).

4 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 4.1 (déterminant d'un endomorphisme)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Le scalaire $\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ de E : on l'appelle <u>déterminant de f</u>, noté $\det(f)$.

Remarques : Les propriétés suivantes découlent directement de la définition :

1. $\det(f) = \det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B}))$, pour tout base $\mathscr{B}$ de E.
2. Le déterminant d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est égal au déterminant de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.
3. $\det(\mathrm{id}_E) = 1$
4. Pour tous $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$, où $n = \dim(E)$.

Théorème 4.2 (caractérisation de la bijectivité à l'aide du déterminant)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
L'endomorphisme f est un automorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$.

Théorème 4.3 (déterminant d'une composée)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et soient f et $g \in \mathscr{L}(E)$.
On a l'égalité : $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$.

Corollaire 4.4 (déterminant d'un automorphisme réciproque, d'un endomorphisme itéré)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Si f est un automorphisme, alors $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det(f^k) = \det(f)^k$.
   Si de plus f est un automorphisme, cette égalité est valable pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

5 Calcul des déterminants

5.1 Méthode de Gauss

Théorème 5.1 (effet des opérations élémentaires sur le déterminant)

Les opérations élémentaires modifient le déterminant d'une matrice de la manière suivante :

$L_i \leftrightarrow L_j$ (avec $i \neq j$)	le déterminant est multiplié par -1
$L_i \leftarrow \lambda L_i$ (avec $\lambda \neq 0$)	le déterminant est multiplié par λ
$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (avec $i \neq j$)	pas d'effet sur le déterminant
$C_i \leftrightarrow C_j$ (avec $i \neq j$)	le déterminant est multiplié par -1
$C_i \leftarrow \lambda C_i$ (avec $\lambda \neq 0$)	le déterminant est multiplié par λ
$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ (avec $i \neq j$)	pas d'effet sur le déterminant

Exemple 5.2 : Soit $m \in \mathbb{R}$, $\begin{vmatrix} m & m \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = m$.

Théorème 5.3 (déterminant d'une matrice triangulaire)

Le déterminant d'une matrice carrée triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Remarque : Ceci est vrai en particulier pour une matrice diagonale.

Conséquence : On peut calculer un déterminant grâce à des opérations élémentaires pour se ramener à une matrice triangulaire, en utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss.

Exemple 5.4 : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 8 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

5.2 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Théorème 5.5 (développement d'un déterminant par rapport à une ligne ou une colonne)

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, et soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, on note $A_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.

1. $\forall j \in [\![1\,;n]\!],\ \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$ (développement par rapport à la j-ème colonne)
2. $\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$ (développement par rapport à la i-ème ligne)

Cette technique de calcul est surtout efficace lorsqu'une ligne ou une colonne comporte « beaucoup » de zéros.
Pour le calcul complet d'un déterminant, on peut combiner cette technique avec des opérations élémentaires :

1. d'abord faire des opérations élémentaires pour faire apparaître une ligne ou une colonne avec le plus de zéros possible ;
2. puis développer suivant cette ligne ou cette colonne.

Exemple 5.6 : On considère la matrice A de l'exemple précédent. Calculer à nouveau son déterminant.